Analyse

7-05-03

TOETS

Ex 1: Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue functie.

▷ Toon aan dat

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

een gesloten verzameling is.

Hint: Je zou het rijtjes-kenmerk voor geslotenheid kunnen gebruiken.

▷ Leidt hieruit af dat de ellipsoïde

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1\}$$

een gesloten verzameling is.

Ex 2: a. Formuleer de stelling van Weierstrass over maxima en minima van functies van meerdere variabelen, en het gevolg voor functies $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die naar $+\infty$ gaan in oneindig.

b. Bewijs de ongelijkheid

$$x^2 - xy + 2y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Hint: maak gebruik van de ongelijkheid $2xy \leq x^2 + y^2$.

c. Toon aan dat de afbeelding

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

een absoluut minimum heeft en bepaal dat.

d. Toon aan dat de verzameling

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + 2y^2 = 4\}$$

compact is.

Ex 3: Zij $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd als volgt:

$$\begin{cases} F(u, v) &= (u, v + u^2) \\ G(x, y) &= \arctan(y - x^2) \end{cases}$$

a. Toon aan dat F een C^1 diffeomorphism is.

b. Bereken de jacobi-matrix van F in (u, v).

c. Bereken de totale afgeleide $(h, k) \mapsto Ah + Bk$ (of differentiaal) van G in (x, y).

d. Bereken de totale afgeleide van $G \circ F$ in het punt (a, b).

7,7

1a Neem de rij (x_n) met $x_n \in F$ en $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Omdat f continu is weten we dat ook $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$
$x_n \in F$ dus $f(x_n) = 0 \ \forall n$; $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = f(x)$
Per definitie ~~....~~ geldt dus ook $x \in F$. Nu volgt direct uit het rijenkenmerk dat F gesloten is. ✓

b Neem ~~....~~ $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1$. Dit is een polynoom, dus continu. ~~...~~ $x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1 \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$ dus met $\underline{x} = (x,y,z)$ volgt uit het voorgaande dat $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 = 1\}$ gesloten is. ✓

✓

2a Als $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ met A compact en f ~~..~~ (begrensd) ~~....~~ volgt! en continu, dan neemt f tenminste één maximum en tenminste één minimum aan op A.
Gevolg: functies $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ met $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ die continu zijn, bereiken een absoluut minimum op $\mathbb{R}^n$. ✓

b $x^2 + y^2 \geq 2xy$
Omdat $y^2 \geq 0 \ \forall y$ geldt:
$x^2 + 3y^2 \geq 2xy$
$x^2 - 2xy + 3y^2 \geq 0$
$\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 \geq 0$
$x^2 - xy + 2y^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

c F is een polynoom, dus continu. Uit b. volgt:
$F(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Omdat $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ en evenzo voor y weten we dat $\lim_{x,y\to\pm\infty} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = +\infty$.
$F(x,y)$ is altijd groter dan of gelijk aan $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, dus $\lim_{x,y\to\pm\infty} F(x,y) = +\infty$. Nu volgt uit het bij a. vermelde gevolg dat $F(x,y)$ op $\mathbb{R}^2$ een absoluut minimum bereikt.
$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (2x - y, 4y - x) = 0$
$2x - y = 0 \ \wedge \ 4y - x = 0$
$2x = y \to 8x - x = 0 \to 7x = 0 \to \underline{\underline{x = 0}} \to \underline{\underline{y = 0}}$
$F(0,0) = 0$. Dit is het enige kritieke punt, dus moet dit het gezochte minimum zijn, want we wisten al dat dat minimum bestond. ✓

2.0.2.

d Omdat $F(x,y) \to +\infty$ voor x en/of y naar oneindig, moet deze verzameling begrensd zijn. ✓ De geslotenheid volgt uit $G(x,y) := F(x,y) - y$ zodat de stelling van opgave 1. van toepassing is. De verzameling is dus begrensd en gesloten, dus compact.

3a $F \in C^1$ omdat ~~F~~ F_1 en F_2 polynomen zijn, dus continu differentieerbaar.

Wat is een diffeomorphisme?

b $DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}$ ✓

bijectie F zodat F en F^{-1} C^1

c $DG = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}, \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = \left(2x \cdot (\arctan)'(y-x^2), (\arctan)'(y-x^2) \right)$

$(h,k) \mapsto G(x,y) + (h-x)2x(\arctan)'(y-x^2) + (k-y)(\arctan)'(y-x^2)$

X

$(h,k) \mapsto \arctan(y-x^2) + (h-x)2x(\arctan)'(y-x^2) + (k-y)(\arctan)'(y-x^2)$

verwarrende definitie van lokale afgeleide

d $(G \circ F)(a,b) = G(F(a,b))$

$(G \circ F)'(a,b) = F'(a,b) \cdot G'(F(a,b))$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a(\arctan)'(b+a^2-a^2) \\ (\arctan)'(b+a^2-a^2) \end{pmatrix}$

X

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a(\arctan)'(b) \\ (\arctan)'(b) \end{pmatrix}$

$= 2a(\arctan)'(b) + 4a^2(\arctan)'(b) + (\arctan)'(b)$

$= (4a^2 + 2a + 1) \cdot (\arctan)'(b)$